Μάθημα 7º $\underline{03/11/2017}$

Θεωρία καμπυλών του $\mathbb{R}^3$

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$

· Καμπυλότητα: $k: I \to [0, +\infty)$ $\quad k(s) = \|\ddot{c}(s)\|$

· Μοναδιαίο Εφαπτόμενο Διάνυσμα: $\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$

$\boxed{\text{Υπόθεση}}$ $\quad k(s) > 0 \quad \forall\, s \in I$

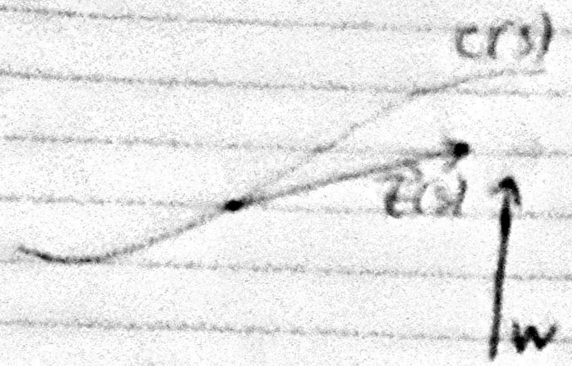
· Πλαίσιο Frenet: $\left\{ \vec{t}, \vec{n} = \dfrac{\ddot{c}}{k}, \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \right\}$

· Εξισώσεις Frenet: $\dot{\vec{t}} = k\vec{n}, \ \dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau\vec{b}, \ \dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}$

Στρέψη: $\tau = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle$

Ερώτημα: Ποιές είναι καμπύλες των οποίων όλες οι εφαπτόμενες ευθείες σχηματίζουν σταθερή γωνία με ένα (μη-μηδενικό) σταθερό διάνυσμα;

$\boxed{\text{Ορισμός}}$ Μια τέτοια καμπύλη θα καλείται καμπύλη σταθεράς κλίσης, δηλ $\exists$ w μοναδιαίο τέτοιο ώστε:



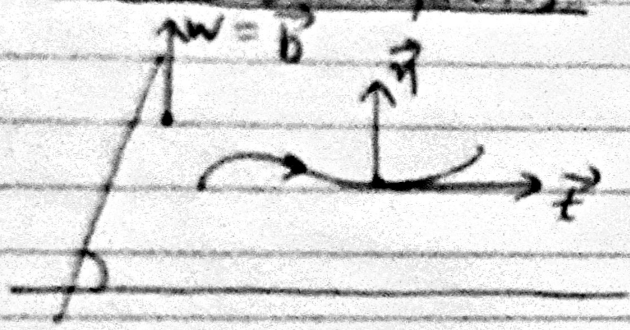
$\langle \vec{t}(s), w \rangle = \cos\varphi$ όπου

φ = σταθερή γωνία

Το διάνυσμα w καλείται διεύθυνση σταθεράς κλίσης. Ενώ η γωνία φ καλείται κλίση

Παραδείγματα

1) <u>Επίπεδες καμπύλες</u>



$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

2) <u>Κυλινδρική έλικα</u>

$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$
$a > 0, \ b \neq 0$

$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο είναι: $\vec{t}(t) = \dfrac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$

$\vec{t}(t) = \Big(-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t, \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$<\vec{t}(t), e_3> = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = σταθ = \cos\varphi$

$e_3=(0,0,1)$

$k=\frac{a}{a^2+b^2}$, $\tau=\frac{b}{a^2+b^2}$

(*) Οι μόνες καμπύλες που έχουν σταθερή καμπυλότητα και σταθερή στρέψη είναι η κυλινδρική έλικα.

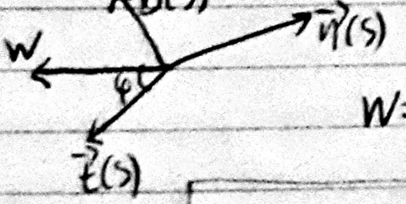
Έστω $c: I\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη σταθεράς κλίσης με φυσική παράμετρο $s\in I$, καμπυλότητας $k(s)>0 \ \forall s\in I$ και στρέψη $\tau(s)$

$<\vec{t}(s), w> = \cos\varphi , \quad \forall s\in I$

$\Rightarrow <\vec{t}(s), w>^{\cdot} = 0 \Rightarrow <\dot{\vec{t}}(s), w> + \vec{t}(s) + \dot{w} = 0$

$<\dot{\vec{t}}(s), w> = 0 \Rightarrow <k(s)\vec{n}(s), w> = 0 \Rightarrow k(s)<\vec{n}(s), w> = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{<\vec{n}(s), w> = 0}$



$w = <w, \vec{t}(s)>\vec{t}(s) + <w, \vec{n}(s)>\vec{n}(s) + <w, \vec{b}(s)>\vec{b}(s)$

$\boxed{w = \cos\varphi\, \vec{t}(s) + \sin\varphi\, \vec{b}(s) , \quad \forall s\in I}$

Παραγωγίζω:

$0 = \cos\varphi\, \dot{\vec{t}}(s) + \sin \dot{\vec{b}}(s) \xrightarrow[\text{Εξίσωση}]{\text{Frenet}} 0 = \cos\varphi\, \tau(s)\vec{n}(s) - \sin\varphi\, \tau(s)\vec{n}(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\varphi\, k(s) = \sin\varphi\, \tau(s) \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = c\tan\varphi$

Αντίστροφα: Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$ καμπυλότητα $k(s) > 0$, $\forall s \in I$ και στρέψη της. Έστω ότι $\frac{\tau(s)}{k} = \text{σταθ.} = c\tan\varphi$.

Θεωρώ τη διανυσματική συνάρτηση: $w: I \to \mathbb{R}^3$ με
$w(s) = \cos\varphi \vec{t}(s) + \sin\varphi \vec{b}(s)$

· Η $w(s)$ είναι λεία με $\dot{w}(s) = \cos\varphi \dot{\vec{t}}(s) + \sin\varphi \dot{\vec{b}}(s) =$

$= \cos\varphi k(s) \vec{n}(s) - \sin\varphi \tau(s) \vec{n}(s) =$

$= \underbrace{(\cos\varphi k(s) - \sin\varphi \tau(s))}_{=0} \vec{n}(s)$

Άρα η $w(s)$ είναι σταθερά, $w(s) = w =$ διάνυσμα

$\|w\| = 1 \quad w = \cos\varphi \vec{t}(s) + \sin\varphi \vec{b}(s)$

$w = \langle w, \vec{t}(s) \rangle + \langle w, \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle w, \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s) \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle w, \vec{t}(s) \rangle = \cos\varphi$

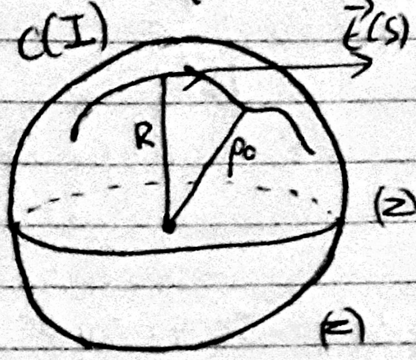
Συμπέρασμα: Οι σφαιρικές καμπύλες έχουν παντού θετική καμπυλότητα

Θεώρημα Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με καμπυλότητα $k>0$ παντού και στρέψη τ. Η c είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης αν-ν $\frac{\tau}{k} =$ σταθερά.

Σφαιρικές Καμπύλες

Ορισμός Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καλείται σφαιρική αν-ν η εικόνα της περιέχεται σε κάποια σφαίρα.

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο s και καμπυλότητα $k(s) > 0$ $\forall s \in I$. Υποθέτω ότι είναι σφαιρική, δηλ. η εικόνα της περιέχεται σε σφαίρα $S^2_R(p_0)$



$$d(c(s), p_0) = R \Leftrightarrow \|c(s) - p_0\| = R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\langle c(s) - p_0, c(s) - p_0 \rangle} = R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\langle c(s) - p_0, c(s) - p_0 \rangle = R^2}, \ \forall s \in I$$

Παραγωγίζω: $\langle c(s) - p_0, c(s) - p_0 \rangle^{\cdot} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{2\langle \dot{c}(s) - p_0, \dot{c}(s) \rangle = 0}, \ \forall s \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle + \langle c(s) - p_0, \ddot{c}(s) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle c(s) - p_0, \ddot{c}(s) \rangle = -1, \ \forall s \in I}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρεθεί καμπύλη $c(s)$ του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$ και καμπυλότητα $k(s) = -5$, τέτοια ώστε $c(0) = (1,1)$, $\dot{c}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ΛΥΣΗ

IDEA: Θα βρω $\vec{t}(s) = \dot{\vec{c}}(s)$ και μετά ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε την καμπύλη.

$$k(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds} = -5$$

$$\int_0^s \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} d\sigma = \int_0^s -5 d\sigma \Rightarrow \varphi(s) - \varphi(0) = -5\sigma \Big|_0^s = -5s$$

$$\varphi(s) = -5s + \varphi(0)$$

$$\vec{t}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)) = (\cos(-5s + \varphi(0)), \sin(-5s + \varphi(0))) \quad (1)$$

Όμως: $\dot{\vec{c}}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\dot{\vec{c}}(0) = \vec{t}(0)$

Από $(1) \xrightarrow{s=0} \vec{t}(0) = (\cos\varphi(0), \sin\varphi(0)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi(0) = 1/\sqrt{2} \\ \cos\varphi(0) = 1/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi(0) = \pi/4$$

Οπότε: $\underset{\dot{\vec{c}}(s)}{\underset{\|}{\vec{t}(s)}} = \left(\cos(-5s+\pi/4), \sin(-5s+\pi/4)\right)$

Ολοκληρώνω από το 0 έως το s

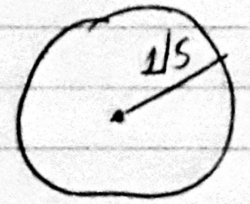
: $\int_0^s \dot{\vec{c}}(\sigma)d\sigma = \left(\int_0^s \cos(-5\sigma+\pi/4)d\sigma, \int_0^s \sin(-5\sigma+\pi/4)d\sigma\right)$

$\vec{c}(s)-\vec{c}(0) = \left(-\frac{1}{5}\sin(-5\sigma+\pi/4)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=s}, \frac{1}{5}\cos\left(-5\sigma+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=s}\right)$

Άρα: $\vec{c}(s)-(1,1) = \left(-\frac{1}{5}\sin\left(-5s+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{4}, \frac{1}{5}\cos\left(-5s+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{5}\cos\frac{\pi}{4}\right)$

Τι παριστάνει γεωμετρικά;

Αφού $k(s) = -5$, σταθερά



αρνητική φορά διαγραφής

$\vec{c}(s)-(1,1) = \left(-\frac{1}{5}\sin(-5s+\pi/4), \frac{1}{5}\cos\left(-5s+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$

$\vec{c}(s) - \underbrace{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{10}, 1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)}_{\vec{cc}\ \text{σταθερό}} = \frac{1}{5}\left(-\sin(-5s+\pi/4), \cos(-5s+\pi/4)\right)$

Παίρνω μέτρα: $\|\vec{c}(s) - \vec{cc}\| = \frac{1}{5}\sqrt{\underbrace{\cos^2(\cdot)+\cos^2(\cdot)}_{1}}$

κύκλος ακτίνας $\frac{1}{5}$

② Να βρεθούν όλες οι καμπύλες $c(s)$ του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$ και μοναδιαίο κάθετο $\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s)$

ΛΥΣΗ

$$\vec{n}(s) = J\vec{t}(s)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ πίνακας στροφής } \frac{\pi}{2}$$

$$J\vec{n}(s) = J^2\vec{t}(s) = -\vec{t}(s) \Rightarrow \boxed{\vec{t}(s) = -J\vec{n}(s)},$$

$$\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix} = (\cos s, \sin s) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dot{\vec{c}}(s) = (\cos s, \sin s)$ - ολοκληρώνω από 0 έως s τότε:

$$\int_0^s \vec{c}(\sigma)d\sigma = \left(\int_0^s \cos\sigma d\sigma, \int_0^s \sin\sigma d\sigma\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{c}(s) - \vec{s}(s_0) = (\sin s - \cancel{\sin 0}^{\,0}, -\cos s + \cancel{\cos 0}^{\,1}) \Rightarrow$$

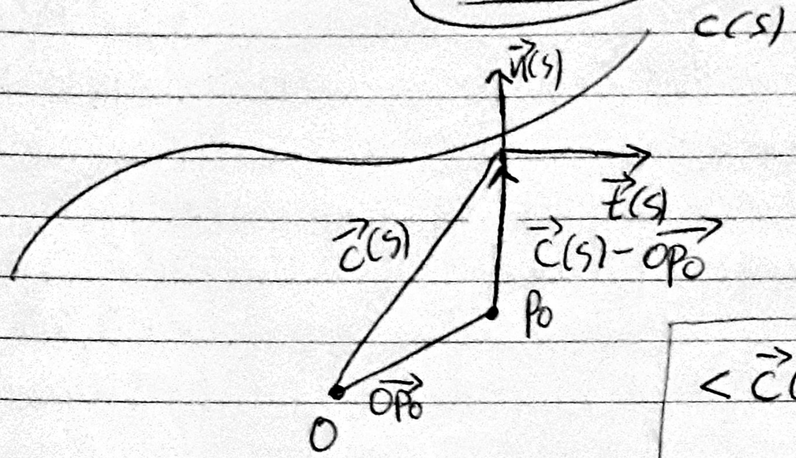
$$\Rightarrow \vec{c}(s) - \vec{c}(s_0) = (\sin s, -\cos o + \cos, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{c}(s) - (\underbrace{\vec{c}(s_0) + (0,1)}_{\vec{c} \text{ σταθερό}}) = (\sin s, -\cos s)$$

Παίρνω μέτρα: $\|\vec{c}(s) - \vec{a}\| = 1$ μοναδιαίος κύκλος

(3) ΝΔΟ: οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ με την ιδιότητα οι κάθετες ευθείες να διέρχονται από σταθερό σημείο P_0 είναι τόξα κύκλου κέντρου P_0.

ΛΥΣΗ



Από Ευφίνου $\vec{c}(s) - \vec{OP_0}$ κάθετο στην καμπύλη. Άρα:

$$\boxed{\langle \vec{c}(s) - \vec{OP_0}, \vec{t}(s) \rangle = 0}$$

Θέλω νδο: $\|\vec{c}(s) - \vec{OP_0}\|^2 =$ σταθερό.

Οπότε ορίζω συνάρτηση $f(s) = \|\vec{c}(s) - \vec{OP_0}\|$

Θέλω νδο $f(s) =$ σταθερή $\Leftrightarrow \dot{f}(s) = 0$

$$\dot{f}(s) = 2\langle \vec{c}(s) - \vec{OP_0}, (\vec{c}(s) - \vec{OP_0})^{\cdot} \rangle = 2\langle \vec{c}(s) - \vec{OP_0}, \vec{t}(s) \rangle = 0$$

Άρα $\dot{f}(s) = 0 \Rightarrow f$ σταθερή

$$\|\vec{c}(s) - \vec{OP_0}\|^2 = R^2 \quad \text{κύκλο κέντρου } \vec{OP_0}$$

$\boxed{\text{Εχοδθο}}$ $\vec{c}(s) - \vec{OP_0} = \lambda(s)\vec{n}(s)$ $\nearrow 1$

Παίρνω μέτρα $\|\vec{c}(s) - \vec{OP_0}\| = |\lambda(s)|\,\|\vec{n}(s)\|$

Πρέπει νδο $\lambda(s) = σταθ \Leftrightarrow \dot{\lambda}(s) = 0$

Συνεπώς παραγωγίζω την (1) και έχω

$$\vec{t}(s) = \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\underbrace{(-k(s)\vec{t}(s))}_{\dot{n}(s)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \lambda(s)k(s))\vec{t}(s) - \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) = \vec{0}$$

$\vec{t}, \vec{n}$ γραμμικώς ανεξάρτητα $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda(s)k(s) = 0 \\ \dot{\lambda}(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = \ell = σταθ \end{cases}$$

$k(s) = -\dfrac{1}{R} = σταθ.$ (ΚΥΚΛΟΣ)

④ Δίνεται καμπύλη $c(t) = \left(t, a\cosh\left(\frac{t}{a} + b\right)\right)$ όπου $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$

Να βρεθεί η καμπυλότητα, ως συνάρτηση του μήκους τόξου.

ΛΥΣΗ

$\cosh = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$\sinh = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

$(\cosh)' = -\sinh t$

$(\sinh) = \cosh t$

• $\vec{c}'(t) = \left(1, \sinh\left(\frac{t}{a} + b\right)\right)$ ...

$$\|\vec{c}'(t)\| = \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{t}{a}+b\right)} = \cosh\left(\frac{t}{a}+b\right) \neq 0$$

Άρα, η καμπύλη είναι κανονική

$$\cdot\ S = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma = \int_{t_0}^{t} \cosh\left(\frac{\sigma}{a}+b\right) d\sigma = a\sinh\left(\frac{\sigma}{a}+b\right)\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= a\sinh\left(\frac{t}{a}+b\right) - a\sinh\left(\frac{t_0}{a}+b\right)$$

$\sinh 0 = 0$

Επιλέγω t_0 ώστε: $\frac{t_0}{a}+b = 0 \Leftrightarrow t_0 = -ab$

$\overset{t_0=-ab}{\Longrightarrow} S - a\sinh\left(\frac{t}{a}+b\right)$, λύνω ως προς t

$$\operatorname{Arcsinh}\left(\frac{S}{a}\right) = \frac{t}{a}+b$$

$$t = a\left[\operatorname{Arcsinh}\left(\frac{S}{a}\right) - b\right]$$

Θα υπολογίσω $k(t)$, t αυθαίρετα 2 αντικαθιστώ το t.

$$\|\vec{c}'(t)\| = \cosh\left(\frac{t}{a}+b\right) \neq 0$$

$$\vec{c}'(t) = \left(1, \sinh\left(\frac{t}{a}+b\right)\right)$$

$$\vec{c}''(t) = \left(0, \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{t}{a}+b\right)\right)$$

$$k(t) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\|c'(t)\|^3} = \frac{x'y''-x''y'}{\|\vec{c}'(t)\|^3}$$

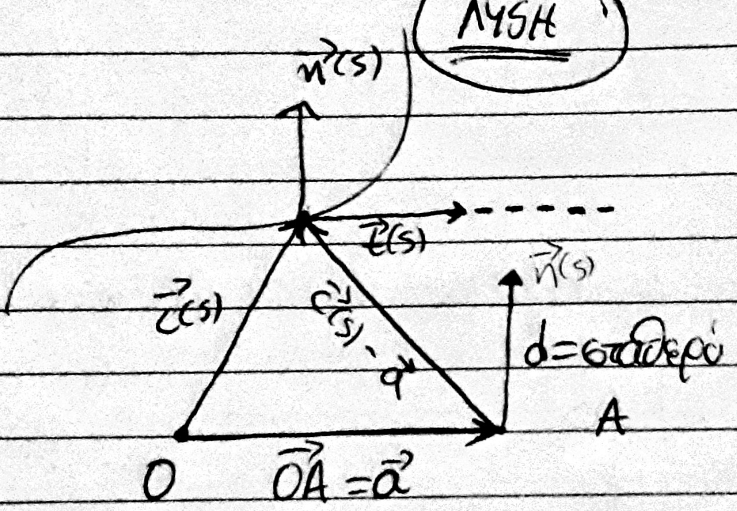
$$k(t) = \frac{\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{t}{a}+b\right)}{\cosh^3\left(\frac{t}{a}+b\right)} = \frac{1}{a\cosh^2\left(\frac{t}{a}+b\right)} = \frac{1}{a\left[1+\sinh^2\left(\frac{t}{a}+b\right)\right]}$$

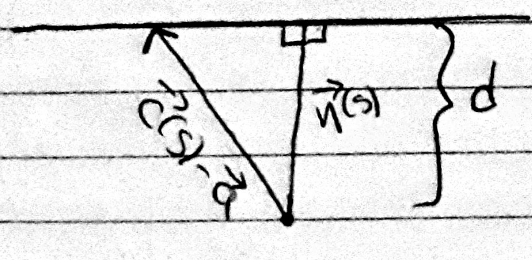
Είχαμε βρει $\boxed{\frac{s}{a} = \sinh\left(\frac{t}{a}+b\right)}$

Οπότε $k(s) = \dfrac{1}{a\left[1+\left(\frac{s}{a}\right)^2\right]}$

⑤ Ν.Δ.Ο οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$, με την ιδιότητα οι εφαπτόμενες ευθείες να απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο Α, είναι τμήματα ευθείας ή τόξα κύκλου

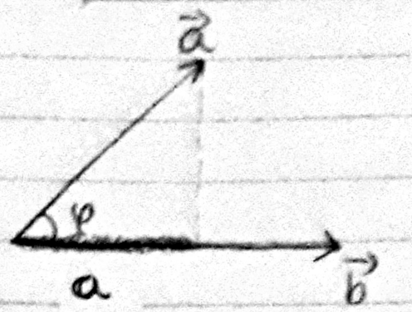
ΛΥΣΗ





d= προβολή του $\vec{r}(s)-\vec{a}$ στο $\vec{n}(s)$

Τότε: $\boxed{d = \langle \vec{c}(s) - \vec{a}, \vec{n}(s) \rangle}$ (2) επειδή $\vec{n}$ μοναδιαίο



$\|\vec{b}\| = 1$ μοναδιαίο

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \overset{1}{\|\vec{b}\|} \cos\varphi =$

$= \|\vec{a}\| \dfrac{d}{\|\vec{a}\|} = d$

Παραγωγίζω την (2): → 0 αφού $\vec{t} \perp \vec{n}$

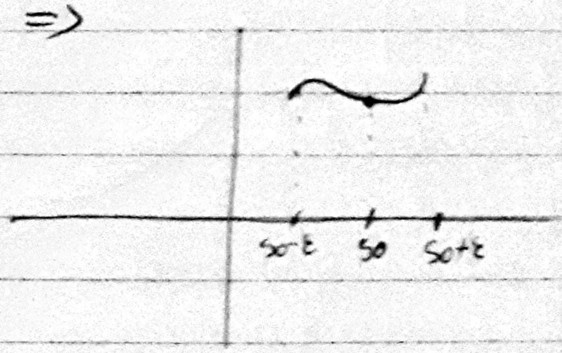
$0 = \cancel{\langle \vec{t}(s) - 0, \vec{n}(s) \rangle} + \langle \vec{c}(s) - \vec{a}, \underbrace{-k(s)\vec{t}(s)}_{\vec{n}'(s)} \rangle$

$\boxed{0 = -k(s) \langle \vec{c}(s) - \vec{a}, \vec{t}(s) \rangle}$ (3)

1η περίπτωση: Αν $\exists$ σημείο s_0 ώστε $k(s_0) \neq 0$

$k(s)$ συνεχής συνάρτηση. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ λόγω συνέχειας $\exists$ περιοχή $V = (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$, ώστε



$\boxed{k(s) \neq 0 \ \forall s \in V}$

Άρα: $\langle \vec{c}(s) - \vec{a}, \vec{t}(s) \rangle = 0, \ \forall s \in V$

Θεωρώ συνάρτηση $f(s) = \|\vec{c}(s) - \vec{a}\|^2$

παραγωγίζω $\dot{f}(s) = 2 \langle \vec{c}(s) - \vec{a}, (\vec{c}(s) - \vec{a})^{\cdot} \rangle =$

$= 2 \langle \vec{c}(s) - \vec{a}, \vec{t}(s) \rangle = 0$

Άρα $f(s) =$ σταθερή

$$\|\vec{c}(s) - \vec{a}\|^2 = \text{σταθερό} = R^2$$

Άρα κύκλος
Άρα η $\vec{c}(s)$ τόξο κύκλου.

$2^{η}$ περίπτωση | $k(s) = 0 \quad \forall s$

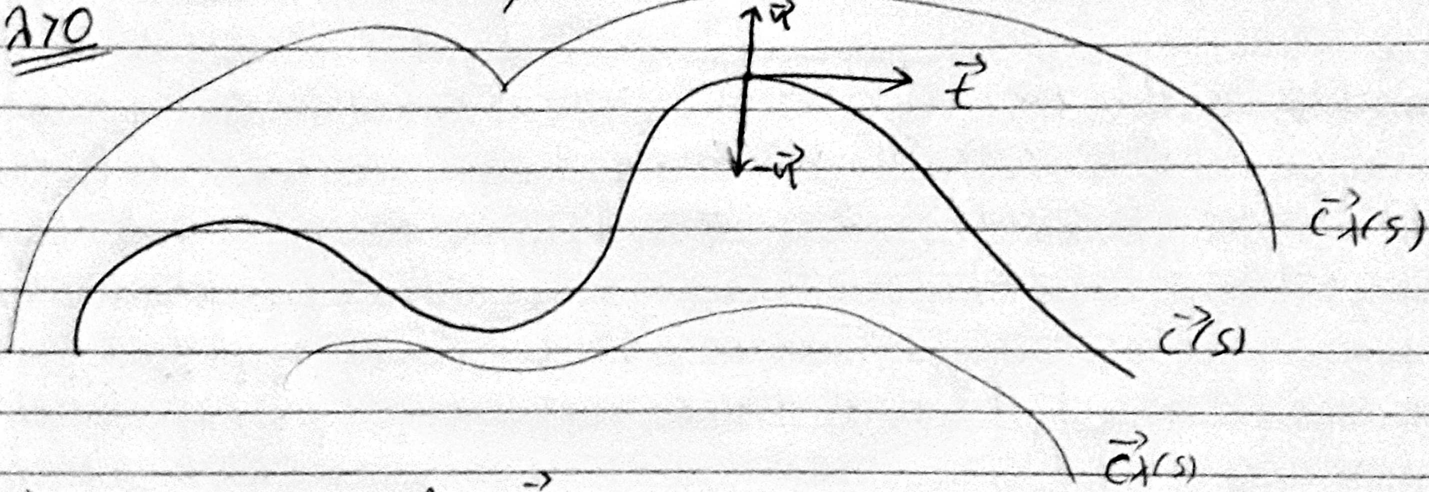
Τότε η καμπύλη είναι ευθεία

(6)

Έστω $\vec{c}(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου. $s \in [a, b]$. Θεωρούμε την καμπύλη

$\vec{c}_\lambda(s) = \vec{c}(s) + \lambda \vec{n}(s)$, όπου $\vec{n}(s)$ το μοναδιαίο κάθετο της $\vec{c}(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθ.

$\lambda > 0$



i) ΝΔΟ η καμπύλη $\vec{c}_\lambda(s)$ είναι κανονική για λ αρκούντως μικρό. Βρείτε πλαίσιο Frenet της $\vec{c}_\lambda(s)$

ii) ΝΔΟ για λ αρκούντως μικρό η καμπυλότητα της c_λ ισούται με

$$k_\lambda(s) = \frac{k(s)}{1 - \lambda k(s)}$$

ΛΥΣΗ

s μήκος τόξου για την $\vec{c}(s)$

i) $(\|\vec{c}\,'(s)\| = 1)$

$$\vec{c}_\lambda{}'(s) = \vec{c}\,'(s) + \lambda \vec{n}\,'(s) \overset{\text{Frenet}}{=} \vec{t}(s) + \lambda(-k(s)\vec{t}(s))$$

$$\vec{c}_\lambda{}'(s) = (1-\lambda k(s))\,\vec{t}(s)$$

$s \in [a,b]$ κλειστό και φραγμένο στο $\mathbb{R}$ (συμπαγές)

$k(s)$ συνεχής $\Rightarrow |k(s)| < \underset{\to \text{ΜΕΓΑΛΟ}}{M} \Rightarrow \dfrac{1}{|k(s)|} > \underset{\to \text{ΜΙΚΡΟ}}{\dfrac{1}{M}}$

Άρα η $k(s)$ λαμβάνει ΜΕ.

Επιλέγω $\lambda < \dfrac{1}{M}$ άρα: $\dfrac{1}{|k(s)|} > \dfrac{1}{M} > \lambda \Rightarrow \dfrac{1}{|k(s)|} > \lambda \Rightarrow \lambda|k(s)| < 1$

αρκούντως μικρό.

$\Rightarrow -1 < \lambda k(s) < 1$

$\Rightarrow 1-\lambda k(s) > 0$

Οπότε αν $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, τότε $\lambda k(s) < 1$

"κοντά στο 0"

Οπότε $1-\lambda k(s) > 0$, $\forall\, s \in [a,b]$

Άρα: $\vec{c}\,' = (1-\lambda k(s))\,\vec{t}(s) \neq \vec{0}$

Οπότε, για λ αρκούντως μικρό η $\vec{c}_\lambda$ είναι κανονική.

<u>Πλαίσιο Frenet για την $\vec{c}_\lambda$</u>

$$\vec{t}_\lambda(s) = \frac{\vec{c}_\lambda{}'(s)}{\|\vec{c}_\lambda{}'(s)\|} = \frac{(1-\lambda k(s))\,\vec{t}(s)}{|1-\lambda k(s)|\,\underbrace{\|\vec{t}(s)\|}_{1}} = \vec{t}(s)$$

διότι $1-\lambda k(s) > 0$

Άρα: $\vec{t}_\lambda(s) = \vec{t}(s)$

$\vec{n}_\lambda(s) = J\vec{t}_\lambda(s) = J\vec{t}(s) = \vec{n}(s)$

ii) Ν.δ.ο: για λ αρκούντως μικρό η καμπυλότητα της C_λ ισούται με $k_\lambda(s) = \dfrac{k(s)}{1-\lambda k(s)}$

ΛΥΣΗ

$$k_\lambda(s) = \frac{\begin{vmatrix} x'_\lambda & y'_\lambda \\ x''_\lambda & y''_\lambda \end{vmatrix}}{\|\vec{C}'_\lambda(s)\|^3} \qquad \vec{C}'_\lambda(s) = (x'_\lambda, y'_\lambda)$$

$$\vec{C}''_\lambda(s) = (x''_\lambda, y''_\lambda)$$

s αυθαίρετη παράμετρο

$$k(s) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} \qquad \vec{C}(s) = (\dot{x}, \dot{y})$$
$$\vec{\ddot{C}}(s) = (\ddot{x}, \ddot{y})$$

"s" μήκος τόξου

Άρα: $\vec{C}'_\lambda(s) = (1-\lambda k(s))\overbrace{(\dot{x}, \dot{y})}^{t}$

$$\vec{C}''_\lambda(s) = -\lambda\dot{k}(s)\underbrace{(\dot{x}, \dot{y})}_{t} + (1-\lambda k(s))\underbrace{(\ddot{x}, \ddot{y})}_{t}$$

$$\begin{vmatrix} x'_\lambda & y'_\lambda \\ x''_\lambda & y''_\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-\lambda k)\dot{x} & (1-\lambda k)\dot{y} \\ -\lambda\dot{k}\dot{x} + (1-\lambda k)\ddot{x} & -\lambda\dot{k}\dot{y} + (1-\lambda k)\ddot{y} \end{vmatrix}$$

- $1^{η}$ γραμμή επί $\dfrac{\lambda\dot{k}}{1-\lambda k}$ και προσθέτω στην $2^{η}$ γραμμή

Μένει: $(1-\lambda k)^2 \underbrace{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}_{k(s)}$

Άρα: $k_\lambda(s) = \dfrac{\cancel{(1-\lambda k(s))^2}\, k(s)}{(1-\lambda k(s))^{\cancel{3}\,1}} = \dfrac{k(s)}{1-\lambda k(s)}$